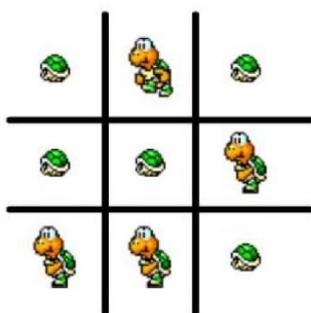


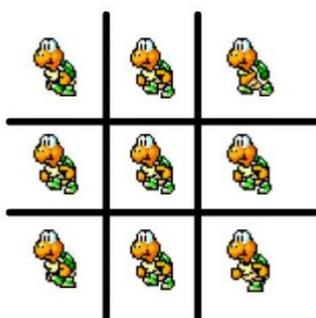
## 12 井字上翻烏龜…相煎何太急

旺宏教育基金會從 2002 年開始，每年舉辦「旺宏科學獎」，該基金會認為科學教育的扎根，在高中階段最顯重要，創新獨立的思考如能從高中階段開始培養，學生的創造力及潛力將超乎想像。旺宏科學獎的獎項有金牌獎、銀牌獎與優等獎，優於金牌獎的作品可得旺宏獎（此獎項可從缺）。這裡所要介紹的這道遊戲來自第三屆旺宏科學獎的旺宏獎作品。

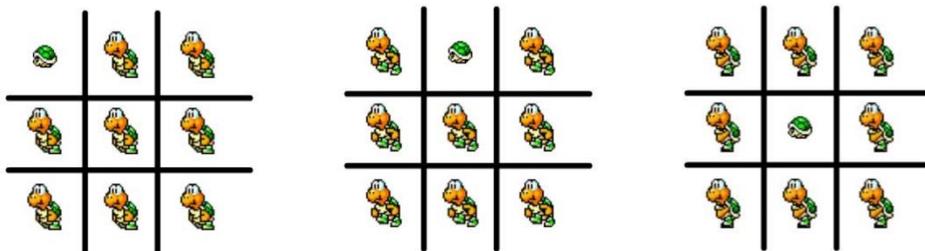
在井字形的九宮格內隨意放置行走或縮頭狀態的九隻烏龜，如下圖所示：



每次只能點選其中的一隻烏龜，被點選的烏龜及與其相鄰的烏龜會改變狀態，即行走狀態的烏龜會變成縮頭狀態的烏龜，而縮頭狀態的烏龜會變成行走狀態的烏龜。遊戲的目的就是要將九隻烏龜都變成行走狀態，如下圖所示：



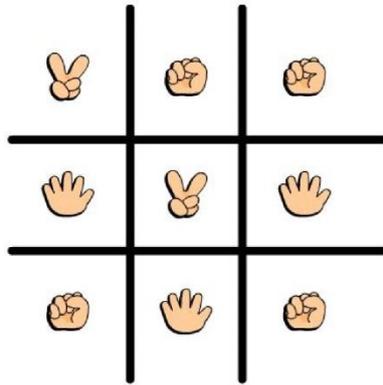
可以從比較簡單的形式操作起，例如下列三種基本的形式：



三種基本形式都可以操作完成後，再來考慮隨意的形式。

事實上，九隻烏龜的狀態隨意放置的形式是以上三種基本形式的變形與合成（有點類似合成函數的味道）。想通了，就可以知道：任何型態都可以調整成九隻烏龜都變成行走狀態。

在旺宏獎作品中，作者以+1及-1的值取代烏龜的狀態，藉助矩陣與行列式的知識得到：任何正方形大小棋盤（井字是3×3）上，隨意放置的烏龜都可以調整為行走狀態。如果把這道遊戲延伸成三種狀態，例如剪刀、石頭與布循環出現，每按一格，此格及與此格相鄰的格子內的剪刀、石頭與布狀態會調整為下一個狀態，那麼是否隨意放置的狀態都可以調整為全是“布”的狀態呢？



關於井字上翻烏龜遊戲的啟發與延伸：

- (1) 在翻烏龜的情形，與燈的開關遊戲雷同，只是作者引入矩陣與行列式得到好的結論，這結論也適用於比井字大的棋盤。
- (2) 在剪刀、石頭與布的情形，可以考慮複數平面上滿足  $z^3 = 1$  的三個根

$$1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

這三個根在複數平面上剛好構成正三角形。

- (3) 將遊戲延伸到多種情況或大棋盤上，就必須使用較困難的行列式求值問題。

## 參考文獻

[1] 旺宏教育基金會第三屆作品觀摩網址：

<http://www.mxeduc.org.tw/ScienceAward/3rd/index.htm> °